Zahlenreihen

Die wichtigsten Methoden zu

$$s=\sum_{1}^{\infty} a_n$$

Text Nr. 51205

Stand: 29. Juli 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Die Nachfrage von Studenten nach Hilfe wächst erkennbar. Die Mathematik-CD bietet neben der Wiederholung des gymnasialen Schulstoffs auch Hilfen für das Grundstudium an.

Vor allem Studenten der Ingenieurwissenschaften müssen sehr viele praktische Aufgaben lösen. Dazu gehören auch Potenzreihen.

Ich verzichte hier auf große Theorie und biete nur das Wichtigste an:

- Welche Methoden benötigt man?
- 100 Musteraufgaben (im Text 40720)

Inhalt

1 Reihen im Gymnasialunterricht

1.1 Definition einer Reihe.

Es sei (a_k) mit $k \in \mathbb{N}$ eine **Zahlenfolge**.

Addiert man die Glieder beginnend ab dem ersten bis zu einer Nummer n, dann hat man die n-te **Partialsumme** s_n erzeugt:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$.....$$
$$s_n := a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \text{bzw.} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \;.$$

Die Folge der Partialsummen (s_n) nennt man eine **Reihe**: $s_1,\ s_2,\ s_3,\ ...$

Wenn diese Reihe konvergiert, nennt man ihren Grenzwert eine **unendliche Reihe**

(oft auch nur Reihe genannt):

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \;, \quad \text{bzw.} \quad s = a_1 + a_2 + ...$$

Man kann eine Reihe auch mit a_0 beginnen lassen,

1.2 Einfache Beispiele aus der Oberstufe der Gymnasien

a) $a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ist eine geometrische Folge, denn der Quotient aufeinander folgender

Glieder ist konstant: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$

Da $|q| < 1$ ist, konvergiert diese Folge und hat den Grenzwert 0.

Das erste Glied der Folge ist $a_1 = 8$

Die zugehörige **geometrische Reihe** ist: $s_n = \sum_{i=1}^{n} 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$

Dazu gibt es eine Reihenformel (Text 40050):

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 8 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 16 - 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Eine geometrische Reihe konvergiert, wenn $|q| < 1$ ist:

Der **Grenzwert** ist dann $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16$.

Also gilt: $16 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{8} + ... = 16$

Oder: $16\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...\right) = 16$

oder: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 1$

Das wäre dann diese Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

b) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ist auch eine geometrische Folge mit $q = \frac{3}{2}$. Sie konvergiert nicht, sondern ist unbeschränkt. Dasselbe gilt für ihre Reihe:

$$s_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right] = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 3$$

Ihr „Grenzwert“ ist ∞, d.h. die Folge konvergiert nicht, sie **divergiert.**

Behauptung: Die Reihe ist unbeschränkt.

Dies kann man so beweisen:

Man zeigt, dass es zu jeder Zahl M > 0 eine Nummer n_0 gibt, ab der $s_n > M$ ist:

Dazu löst man die Ungleichung $s_n > M$

d. h. $$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 3 > M \qquad (1)$$

$$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n > M + 3$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > \frac{M+3}{3}$$

Nennt man die rechte Seite K: $\left(\frac{3}{2}\right)^n > K$

Nun wird die Ungleichung logarithmiert. Dabei ändert sie ihre Richtung nicht, denn die

Logarithmusfunktion wächst monoton: $\ln\left(\frac{3}{2}\right)^n > \ln K$

3. Log-Regel anwenden: $n \cdot \ln\frac{3}{2} > \ln K \qquad |: \ \ln\frac{3}{2} > 0$

$$n > \frac{\ln K}{\ln\frac{3}{2}} \qquad (2)$$

Die rechte Seite ist stets berechenbar.

Es sei nun n_o die kleinste ganze Zahl, die diese Ungleichung löst, dann gilt für $n \geq n_0$: $s_n > M$.

Dahinter steckt noch das Wissen, dass sich jeder der Umformungsschritte umkehren lässt, so dass aus (2) wieder (1) folgt.

Beispiel: Ab welcher Nummer ist $s_n > 10^6$?

Hier ist $M = 10^6$ also $K = \frac{10^6 + 3}{3}$ und $\frac{\ln K}{\ln\frac{3}{2}} \approx 31{,}36$

Also gilt für $n \geq 32$: $s_n > 10^6$

c) Die Folge $a_n = 3n+1$ ist eine **arithmetische Folge** (denn die Differenz aufeinander folgender Zahlen ist konstant (und zwar hier 3). Die zugehörige **arithmetische Reihe** ist

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} (3k+1)$$

Die Summenformel der arithmetischen Reihe lautet:

$$s_n = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

bzw. $$s_n = \tfrac{n}{2}(4+3n+1) = \tfrac{n}{2}(3n+5) = \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n$$

Für $n \to \infty$ gilt $s_n \to \infty$.

Beispielsweise ist $s_{100} = 15.250$

d) Die **harmonische Folge** lautet $a_n = \frac{1}{n}$ und die **harmonische Reihe** ist:

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots \tfrac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k}$$

Sie divergiert gegen Unendlich, wie folgender Beweis zeigt:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \dots + \tfrac{1}{16}\right) + \dots \\ &\geq 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \dots + \tfrac{1}{16}\right) + \dots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht gegen Unendlich, für $n \to \infty$, weil fortgesetzt die Zahl $\frac{1}{2}$ addiert wird.

Bei der Untersuchung anderer Reihen wird sie oft als Vergleich herangezogen,
Wenn die Glieder einer anderen Reihe größer sind als die der harmonischen, dann divergiert sie auch.

Wir merken uns:

Obwohl die harmonische Folge eine Nullfolge ist, divergiert die zugehörige Reihe!

2 Konvergenzkriterien

Man kann natürlich zu jeder Zahlenfolge (a_n) eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bilden. Die Frage ist dann immer:

Konvergiert diese Reihe? Das heißt mit anderen Worten: Hat die Folge $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ der Partialsummen einen Grenzwert? Um dies herauszufinden gibt es mehrere Hilfsmittel (Kriterien), die nun aufgezählt und mit je zwei Beispielen belegt werden.

Wer mehr Beispiele sucht, schaue bitte im Text 40720 nach, dort werden fast 100 Reihen untersucht.

2.1 Notwendige Bedingung

Damit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, muss die Folge (a_n) eine Nullfolge sein: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Das aber reicht für die Konvergenz nicht aus. Als Beispiel verweise ich auf die harmonische Reihe von Seite 5, welche divergiert, obwohl die zugrunde liegende Folge eine Nullfolge ist.

Sicher gilt aber: **Wenn** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiele dazu:

Beispiel 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$

Für $n \to \infty$ geht $\frac{1}{n} \to 0$ und $\ln\left(\frac{1}{n}\right) \to -\infty$

Also ist $a_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ keine Nullfolge. Daher divergiert die Reihe.

Beispiel 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{5}$ mit $a_n = \sqrt[n]{5} = 5^{\frac{1}{n}}$

Die Exponentenfolge $b_n = \frac{1}{n}$ ist zwar eine Nullfolge, aber weil die Funktion $f(x) = 5^x$ stetig ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 5^{1/n} = 5^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 5^0 = 1$$

Da keine Nullfolge vorliegt, divergiert die Reihe.

Beispiel 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{2n+1}$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{5}{2}$ divergiert die Reihe.

2.2 Quotientenkriterium

Es sei (a_n) eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Formulierung: Wenn es eine Zahl q < 1 gibt, so dass ab einer bestimmten Nummer n_0 gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ ist, dann konvergiert Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Gilt jedoch $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ **fast immer**, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Formulierung: Ist $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Ist $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > q > 1$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Sonderfall: Ist $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, dann ist keine Aussage möglich.

Hinweis: Wenn eine Relation für $n \geq n_0$ gilt, sagt man auch „***für alle außer endlich vielen***“, oder „ ***für fast alle***“, oder „***fast immer***“.

Beispiel 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(-3)^n}$, $= \frac{1\cdot 2}{-3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{(-3)^3} + ... = -\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{9} - \frac{3\cdot 4}{27} - + ...$

Da $a_n \neq 0$ ist, ist das Quotientenkriterium anwendbar:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(n+2)}{(-3)^{n+1}} \cdot \frac{(-3)^n}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{(n+2)}{(-3)} \cdot \frac{1}{n}\right| = \frac{n+2}{3n}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3n}\right) = \frac{1}{3} < 1$ also konvergiert die Reihe absolut.

Beispiel 5: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cos\frac{1}{n}}$ Die Voraussetzung $a_n \neq 0$ ist erfüllt. Aber wegen

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n+1}} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1$, liegen in jeder noch so kleinen ε-Umgebung von 1 unendlich viele Glieder von $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$,

Die Brüche $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ sind also nicht ab einer bestimmten Nummer < 1.

Also ist keine Konvergenzaussage möglich (Sonderfall s. o.).

Beispiel 6: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} = q < 1$$

Oder so: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = ... = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3} = \frac{1}{3} = q < 1$

2.3 Wurzelkriterium

1. Formulierung:

Wenn es eine feste Zahl q < 1 gibt, so dass ab einer bestimmten Nummer n_0 gilt

$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$, dann konvergiert Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

$\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$, dann divergiert die Reihe.

2. Formulierung:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ ist.

Sonderfall: Ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, dann ist keine Aussage möglich.

Beispiel 7: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9n^2-2)^n}{(4n+1)^{2n}}$ Es sei $a_n = \frac{(9n^2-2)^n}{(4n+1)^{2n}}$.

Da mit n potenziert wird, verwendet man das Wurzelkriterium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(9n^2-2)^n}{(4n+1)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2-2}{(4n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n^2-2}{16n^2+8n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{9-\frac{2}{n^2}}{16+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{9}{16} < 1$$

Also konvergiert die Reihe.

Beispiel 8 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^n \cdot \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n\right|} = \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} \to \frac{2}{3} = q < 1:$$

Die Reihe konvergiert absolut.

Beispiel 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)^n$ mit $a_n = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)^n$

Man muss herausfinden, dass **für fast alle** $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)$$

Wann ist das < 1? $\frac{3}{4}+\frac{1}{n} < 1 \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{4} \iff n > 4$

Beispiel: $\frac{3}{4}+\frac{1}{\boxed{5}} = \frac{15}{20}+\frac{4}{20} = \frac{19}{20}$

Also gilt für > 4: $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$

Ergebnis: Die Reihe konvergiert.

2.4 Majorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn sie eine konvergente Majorante besitzt.

Eine Majorante ist eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit der Eigenschaft $|a_n| \le b_n$ ab $n \ge n_0$.

Beispiel 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^3+n+1}$ mit $a_n = \frac{2n}{n^3+n+1} \le \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$

Weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ konvergiert (das wird jetzt als bekannt vorausgesetzt)

ist diese eine Majorante für die gegebene Reihe, die daher auch konvergiert.

Beispiel 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+4^n}$ Es ist $\frac{3^n}{2^n+4^n} < \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Also ist die geometrische Reihe mit $q = \frac{3}{4}$ eine konvergente Majorante.

Also konvergiert auch die gegebene Reihe.

Beispiel 12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+n!}$

Zuerst bilde ich eine Majorante für die Reihe: $a_n = \frac{2^n}{n+n!} \le \frac{2^n}{n!} = b_n$

Dann wende ich das Quotientenkriterium für b_n an:

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Es gibt also eine Zahl q mit 0 < q < 1 so dass für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} < q$.

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und ist eine Majorante für die gegebene Reihe.

Diese konvergiert daher auch.

Beispiel 13 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{2^n}$ Es ist $\frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{2^n} < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, denn $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$:

Also ist $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{2^n} \le \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = S$$

Für die unendliche geometrische Reihe gilt: $S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Also folgt: $S = S_\infty - \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Und damit: $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2}$$

2.5 Minorantenkriterium

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie ist ist divergent,

wenn es eine divergente Minorante besitzt.

Eine Minorante ist eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit der Eigenschaft $a_n \geq b_n \geq 0$ ab $n \geq n_o$.

Beispiel 14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$$

Somit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Die letzte Reihe ist die divergente harmonische Reihe.
Nach dem Minorantenkriterium divergiert daher auch die gegebene Reihe.

Beispiel 15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Für natürliche Zahlen gilt: $n \leq n^2$.

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ wächst streng monoton. Also folgt $\sqrt{n} \leq \sqrt{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \leq n$

Und daraus ergibt sich $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$. Also ist $a_n > \frac{1}{n}$

Daraus folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Die rechte Reihe ist die harmonische Reihe, welche divergiert.
Nach dem Minorantenkriterium divergiert dann auch die gegebene Reihe.

Beispiel 16 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{2^k+4^k}$

Wegen $\frac{4^k}{2^k+4^k} \geq \frac{4^k}{4^k+4^k} = \frac{4^k}{2 \cdot 4^k} = \frac{1}{2}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{2^k+4^k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ eine divergente Minorante.

Daher divergiert auch die gegebene Reihe.

2.6 Cauchy-Kriterium:

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt sodass für alle $s > r \geq n_0$ gilt: $\left|\sum_{n=r}^{s} a_n\right| < \varepsilon$.

Dieses Kriterium ist notwendig und hinreichend, gilt also in beiden Richtungen

Es bedeutet, dass man stets beliebig kleine absolute Zwischensummen $|a_r + a_{r+1} + ... + a_s|$ findet und zwar ab Nummern $s > r \geq n_0$.

Beispiel 17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ...$

Eine Zwischensumme kann man hier so schreiben:

$$zs = \sum_{n=r}^{s} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{r\cdot(r+1)} + \frac{1}{(r+1)(r+2)} + ... + \frac{1}{(s-1)s} + \frac{1}{s(s+1)}$$

Dieser Trick hilft weiter: $a_n = \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ Damit folgt für die Zwischensumme:

$$zs = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) + \left(\frac{1}{r+2} - \frac{1}{r+3}\right) + ... + \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

Paarweise fallen Brüche weg, und übrig bleiben der erste und letzte Bruch:

$$zs = \frac{1}{r} - \frac{1}{s+1} < \frac{1}{r}$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ (z. B. $\varepsilon = 10^{-3}$) gegeben, dann gilt: $\frac{1}{r} < \varepsilon$, also $r > \frac{1}{\varepsilon}$ ($r > 10^3$)

Ab der Nummer 1001 ist dann jede Zwischensumme < 10^{-3}.

Beispiel 18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + ...$

Eine Zwischensumme kann man hier so schreiben:

$$zs = \sum_{n=r}^{s} \frac{1}{n\cdot(n+2)} = \frac{1}{r\cdot(r+2)} + \frac{1}{(r+1)(r+3)} + \frac{1}{(r+2)(r+4)} ... + \frac{1}{(s-1)(s+1)} + \frac{1}{s(s+2)}$$

Dieser Trick hilft weiter: $a_n = \frac{1}{n\cdot(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$ Damit folgt für die Zwischensumme:

$$zs = \left(\frac{\frac{1}{2}}{r} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{r+2}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{r+1} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{r+3}}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{r+2}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{r+4}}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{r+3}} - \frac{\frac{1}{2}}{r+5}\right) + ...$$

$$... + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{s-3}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{s-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{s-2}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{s}}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{s-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{s+1}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{s}} - \frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right)$$

Paarweise fallen Brüche weg, und übrig bleiben vier Brüche:

$$zs = \frac{\frac{1}{2}}{r} + \frac{\frac{1}{2}}{r+1} - \frac{1}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s+2} < \frac{\frac{1}{2}}{r} + \frac{\frac{1}{2}}{r+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r+1+r}{r\cdot(r+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2r+1}{r^2+r} = \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2\cdot\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}\right)}{r^2\left(1+\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{r}+\frac{1}{r^2}}{1+\frac{1}{r}} \xrightarrow[r\to\infty]{\text{für}} 0$$

Also kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, sodass gilt $\left|\sum_{n=r}^{s} a_n\right| < \varepsilon$ ......

2.7 Leibniz-Kriterium

Es sei (a_n) eine alternierende Nullfolge

und $|a_n|$ sei monoton fallend

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Beispiel 19 Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ verwendet die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Sie lautet ausführlich: $a_1 = -1,\ a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ a_3 = \frac{-1}{\sqrt{3}},\ a_4 = \frac{1}{2},\ a_5 = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \ldots$

bzw. $s = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \ldots$

Die Folge (a_n) alterniert und $b_n = |a_n|$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Also konvergiert die Reihe.

Beispiel 20 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right)$

Veranschaulichung: $\cos(0) - \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{2}{6}\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{8}\pi\right) + - \ldots$

Für diese alternierende Reihe wendet man das Leibnizkriterium an:

(1) $b_n = \frac{n-1}{2n}\pi = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ wächst monoton, da $\frac{1}{n}$ abnimmt und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{\pi}{2}$

Es ist also $b_{n+1} > b_n$

Die cos-Funktion fällt im Intervall $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ monoton und ist dort stetig.

Also folgt aus $b_{n+1} > b_n$ die Eigenschaft $\cos(b_{n+1}) < \cos(b_n)$,

d. h. die Folge $c_n = \cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi\right)$ fällt monoton.

(2) Wegen der Stetigkeit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos(b_n) = \cos\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Also ist (c_n) eine fallende Nullfolge.
Nach Leibniz konvergiert also die alternierende Reihe.

3 Konvergenzeigenschaften

Es gibt eine Reihe von Überlegungen bzw. Behauptungen, die wahr oder falsch sein können. Hier einige Beispiele dazu.

3.1 Die folgende Behauptung ist falsch:

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ beide divergent sind, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Gegenbeispiel: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ ist konvergent.

(Nach dem Leibniz-Kriterium, denn $|a_n|$ ist eine monoton fallende Nullfolge.)

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{n+2} = \frac{1}{n+2} \quad \text{Die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ divergiert.}$$

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{n+2} = \frac{-1}{n+2} \quad \text{Die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1+2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \text{ divergiert.}$$

3.2 Die folgende Behauptung ist wahr:

Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^n$.

Beweis: Da nach Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt, gibt es eine Nummer n_O, so dass gilt:

Für $n \geq n_O$ gilt $|a_n - 0| < \frac{1}{2}$, also $|a_n| < \frac{1}{2}$.

Daraus folgt dann $|a_n{}^n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$ -

Weil $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ als geometrische Reihe konvergiert.

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann auch $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)^n$.

3.3 Die folgende Behauptung ist wahr:

Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n{}^2$ konvergieren, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n|$

Beweis: Man nützt diese Beziehung: $(a_n \pm b_n)^2 = a_n{}^2 \pm 2a_n b_n + b_n{}^2$

Wegen $(a_n \pm b_n)^2 \geq 0$

Gilt auch $a_n{}^2 \pm 2a_n b_n + b_n{}^2 \geq 0$

Daraus folgt: $\pm 2a_n b_n \leq a_n{}^2 + b_n{}^2$

bzw. $2|a_n b_n| \leq a_n{}^2 + b_n{}^2$

und $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right)$

Daher konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n|$.

3.4 **Die folgende Behauptung ist <u>falsch</u>:**

Wenn die Folge $\{a_n\}$ monoton fällt und $a_n > 0$ ist, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Gegenbeispiel:

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergiert (harmonische Reihe).

3.4 **Die folgende Behauptung ist <u>wahr</u>:**

Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, dann konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(ra_n) = r\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

4 Regeln für Reihen

(1) Man kann konvergente Reihen gliedweise summieren:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k + \sum_{n=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} (a_k + b_k)$$

Das heißt: Wenn beide Reihen konvergieren, dann auch deren Summe.

Umgekehrt kann man auch eine Reihensumme in zwei Teilsummenreihen zerlegen.

(2) Vielfache einer Reihe: $r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_k = \sum_{n=0}^{\infty} r a_k$

Das heißt: Wenn eine Reihe konvergiert, dann auch Vielfache davon.

(3) Aus $|a_n| \le b_n$ folgt $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Das heißt: Hat eine Reihe eine konvergente Majorante, konvergiert sie selbst auch. (Majorantenkriterium).